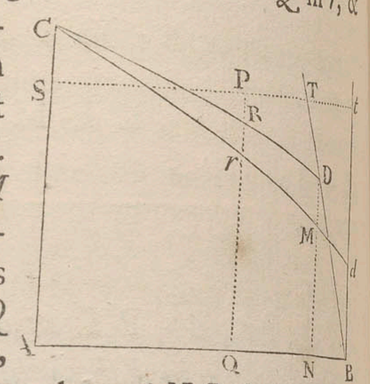
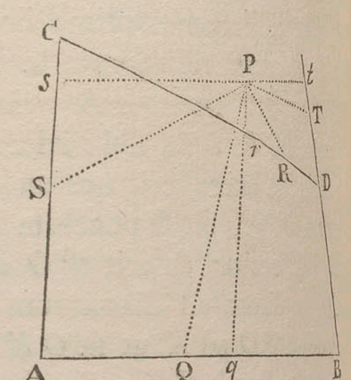
corum *Apollonii*) rectangulum PQK ad rectangulum AQB in data ratione. Sed QK & PR æquales sunt, utpote æqualium OK, OP, & OQ, OR differentiæ, & inde etiam rectangula PQK & $PQ \times PR$ æqualia sunt; atque ideo rectangulum $PQ \times PR$ est ad rectangulum AQB, hoc est ad rectangulum $PS \times PT$ in data ratione. *Q. E. D.*

Cas. 2. Ponamus jam trapezii latera opposita AC & BD non esse parallela. Age Bd parallelam AC & occurrentem tum rectæ ST in t, tum conicæ sectioni in d. Junge Cd secantem PQ in r, & ipsi PQ parallelam age DM secantem Cd in M & AB in N. Jam ob similia triangula BTt, DBN; est Bt seu PQ ad Tt ut DN ad NB. Sic & Rr est ad AQ seu PS ut DM ad AN. Ergo, ducendo antecedentes in antecedentes & consequentes in consequentes, ut rectangulum PQ in Rr est ad rectangulum PS in Tt, ita rectangulum NDM est ad rectangulum ANB, & (per cas. 1.) ita rectangulum PQ in Pr est ad rectangulum PS in Pt, ac divisim ita rectangulum $PQ \times PR$ est ad rectangulum $PS \times PT$. *Q. E. D.*



Cas. 3. Ponamus denique lineas quatuor PQ, PR, PS, PT non esse parallelas lateribus AC, AB, sed ad ea utcunque inclinatas. Earum vice age Pq, Pr parallelas ipsi AC; & Ps, Pt parallelas ipsi AB; & propter datos angulos triangulorum PQq, PRr, PSs, PTt, dabuntur rationes PQ ad Pq, PR ad Pr, PS ad Ps, & PT ad Pt; atque ideo rationes compositæ $PQ \times PR$ ad $Pq \times Pr$, & $PS \times PT$ ad $Ps \times Pt$. Sed, per superius demonstrata, ratio $Pq \times Pr$ ad $Ps \times Pt$ data est: ergo & ratio $PQ \times PR$ ad $PS \times PT$. *Q. E. D.*

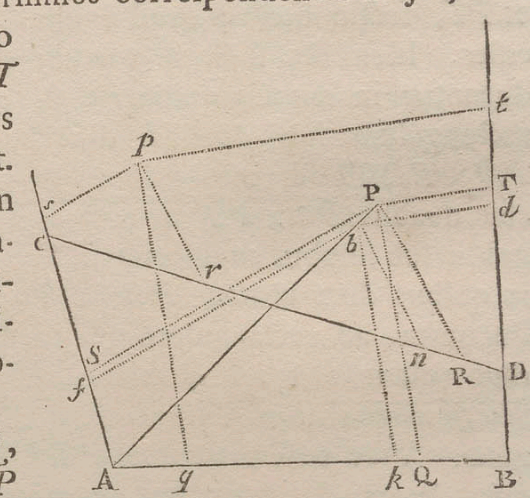


LEMMA

LEMMA XVIII.

Iisdem positis, si rectangulum ductarum ad opposita duo latera trapezii PQ×PR *sit ad rectangulum ductarum ad reliqua duo latera* PS×PT *in data ratione; punctum* P, *a quo lineæ ducuntur, tanget conicam sectionem circa trapezium descriptam.*

Per puncta A, B, C, D & aliquod infinitorum punctorum P, puta p, concipe conicam sectionem describi: dico punctum P hanc semper tangere. Si negas, junge AP secantem hanc conicam sectionem alibi quam in P, si fieri potest, puta in b. Ergo si ab his punctis p & b ducantur in datis angulis ad latera trapezii rectæ pq, pr, ps, pt & bk, bn, bf, bd; erit ut $bk \times bn$ ad $bf \times bd$ ita (per lem. XVII.) $pq \times pr$ ad $ps \times pt$, & ita (per hypoth.) $PQ \times PR$ ad $PS \times PT$. Est & propter similitudinem trapeziorum $bkAf$, $PQAS$, ut bk ad bf ita PQ ad PS. Quare, applicando terminos prioris proportionis ad terminos correspondentes hujus, erit bn ad bd ut PR ad PT. Ergo trapezia æquiangula $Dnbd$, $DRPT$ similia sunt, & eorum diagonales Db, DP propterea coincidunt. Incidit itaque b in intersectionem rectarum AP, DP ideoque coincidit cum puncto P. Quare punctum P, ubicunque sumatur, incidit in assignatam conicam sectionem. *Q. E. D.*



Corol. Hinc si rectæ tres PQ, PR, PS a puncto communi P ad alias totidem positione datas rectas AB, CD, AC, singulæ ad singulas, in datis angulis ducantur, sitque rectangulum sub duabus ductis $PQ \times PR$ ad quadratum tertiæ PS in data ratione: punctum P, a quibus rectæ ducuntur, locabitur in sectione conica quæ tangit lineas AB, CD in A & C; & contra. Nam coeat linea

BD cum